1.1. Логические функции

Функция, однозначно определяющая соответствие каждой из всех возможных совокупностей значений аргументов нулю или единице, называется функцией алгебры логики (ФАЛ).

Логические переменные – как функция, так и аргументы, могут принимать только два значения. Обычно их обозначают символами 0 и 1.

Для технической реализации ФАЛ используют электрические схемы, называемые логическими элементами. Логический элемент (ЛЭ) выполняет логические операции над одной или более логическими переменными. При этом переменная-функция соответствует выходу ЛЭ, а переменные-аргументы – разрядам двоичных наборов, поступающим на соответствующие входы ЛЭ.

Закон функционирования ЛЭ представляют в виде **таблицы истинности**. В строках первого раздела этой таблицы по порядку записываются десятичные номера входных двоичных наборов. В строках второго раздела записываются собственно входные наборы, представляющие собой n-разрядное двоичное отображение соответствующего десятичного номера. В строках третьего раздела записываются соответствующие входным наборам значения функции.

Номер набора	Аргументы			Функция
	X_{n-1}	…	X_0	Y_0
0	0	0	0	
1	0	0	1	
	…	…	..	
$2^n - 2$	1	1	0	
$2^n - 1$	1	1	1	

Сложные ФАЛ строятся на основе элементарных ФАЛ. Элементарной называется ФАЛ одного или двух аргументов, в логическом выражении которой содержится не более одной логической операции.

1.1.1. Константа нуля

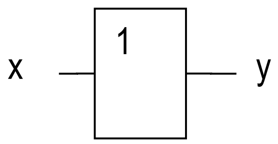
Записывается как y = 0. Реализуется генератором нуля, который на схемах обозначается соединением соответствующего входа ЛЭ с «землей» (общим проводом источника питания).

1.1.2. Константа единицы

Записывается как y = 1. Реализуется генератором единицы, который на схемах обозначается соединением соответствующего входа ЛЭ с полюсом источника питания.

1.1.3. Повторение

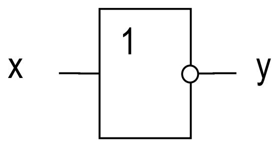
Записывается как y = x. Реализуется логическим элементом - повторителем. Его условное графическое обозначение и таблица истинности:



№ набора	x	y
0	0	0
1	1	1

1.1.4. Инверсия (логическое отрицание)

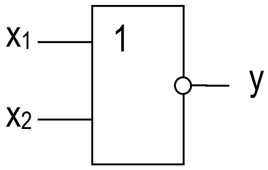
Записывается как y = $\overline{x}$. Реализуется логическим элементом НЕ (инвертором). Его условное графическое обозначение и таблица истинности:



№ набора	x	y
0	0	1
1	1	0

1.1.5. Операция ИЛИ

Иначе дизъюнкция, логическое сложение. ФАЛ записывается в виде y= $X_1 \vee X_2$. Реализуется логическим элементом ИЛИ. Его условное графическое обозначение и таблица истинности:



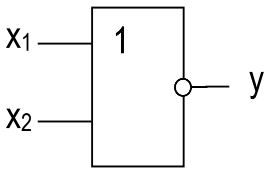
№ набора	x_1	x_2	y
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	1

1.1.6. Операция ИЛИ-НЕ

Иначе стрелка Пирса. ФАЛ записывается в виде $y=X_1 \downarrow X_2$ может быть представлена и в сложной форме:

$$y=\overline{a \vee b}.$$

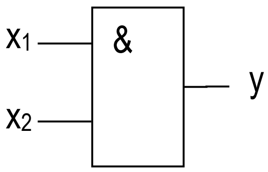
Реализуется логическим элементом ИЛИ-НЕ. Условное графическое обозначение и таблица истинности:



№ набора	x_1	x_2	y
0	0	0	1
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	0

1.1.7. Операция И

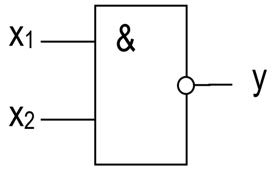
Иначе конъюнкция, логическое умножение. ФАЛ записывается в виде $y=X_1 \wedge X_2$. Реализуется логическим элементом И. Его условное графическое обозначение и таблица истинности:



№ набора	x_1	x_2	y
0	0	0	0
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	1

1.1.8. Операция И-НЕ

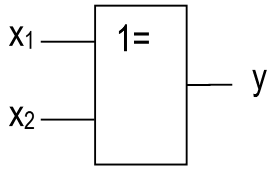
Иначе штрих Шеффера. ФАЛ записывается в виде $y=X_1|X_2$. Может быть представлена в сложной форме: $y=\overline{a \wedge b}$. Реализуется логическим элементом И-НЕ. Условное графическое обозначение и таблица истинности:



№ набора	x_1	x_2	y
0	0	0	1
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	0

1.1.9. Исключающее ИЛИ

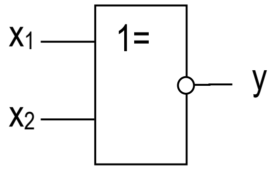
Иначе сложение по модулю два, неравнозначность. ФАЛ записывается в виде $y = X1 \oplus X2$. Реализуется сумматором по модулю два. Его условное графическое обозначение и таблица истинности:



№ набора	x_1	x_2	y
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	0

1.1.10. Эквивалентность

ФАЛ может быть представлена в сложной форме: $y = \overline{a \oplus b}$. Реализуется одноименным ЛЭ. Его условное графическое обозначение и таблица истинности:



№ набора	x_1	x_2	y
0	0	0	1
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	1

Все рассмотренные функции могут быть расширены на произвольное число аргументов.

Законы и тождества алгебры логики

Тождества:

$$x \vee x = x, \quad x \vee \overline{x} = 1, \quad x \vee 1 = 1, \quad x \vee 0 = x,$$

$$x \wedge x = x, \quad x \wedge \overline{x} = 0, \quad x \wedge 1 = x, \quad x \wedge 0 = 0,$$

$$x \oplus x = 0, \quad x \oplus \overline{x} = 1, \quad x \oplus 1 = \overline{x}, \quad x \oplus 0 = x.$$

Законы:

двойной инверсии	$\overline{\overline{a}} = a$
сочетательный	$a\wedge(b\wedge c) = (a\wedge b)\wedge c$ $a\vee(b\vee c) = (a\vee b)\vee c$ $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$
переместительный	$a\wedge b = b\wedge a$ $a\vee b = b\vee a$ $a \oplus b = b \oplus a$
распределительный	$a\wedge(b\vee c) = a\wedge b \vee a\wedge c$ $a\vee(b\wedge c) = (a\vee b)\wedge(a\vee c)$ $a\wedge(b \oplus c) = a\wedge b \oplus a\wedge c$
двойственности (правила де Моргана)	$\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}, \ \overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b};$
поглощения	$a \vee a\wedge c = a$ $a\wedge(a\vee c) = a$
склеивания	$a\wedge \overline{c} \vee a\wedge c = a$ $(a\vee \overline{c})\wedge(a\vee c) = a$

Все указанные законы и тождества справедливы для любого числа аргументов, причем аргументом может быть как простая переменная, так и функция.

Законы и тождества алгебры логики используются для преобразования ФАЛ в процессе синтеза цифровых устройств. В частности, целью преобразования может быть упрощение ФАЛ.

Кроме того, в тождествах отражены правила замены логических элементов одного типа логическими элементами другого типа.